

Oil export modeling using ARFIMA model with Bayesian estimation approach

Parviz Nasiri

Full Professor of Statistics, Payame Noor
University (PNU), Tehran, Iran

**Masoud Fazlalipour
Miyandoab***

Assistant Professor of Statistics, Payame
Noor University (PNU), Tehran, Iran

Abstract

Statistical data modeling is one of the important topics that can be used to provide a suitable model by using statistical distributions according to the nature of the data. One of these statistical models for modeling time series data is the ARFIMA model. Due to its structure, this model is widely used in the analysis of economic, meteorological, geographic, oil and financial data. This paper discusses time series models, including the ARFIMA model, assuming that the error term is normally distributed. In using models for better forecasting for the first time, while examining the behavior of long-term models, the Bayesian approach and the use of appropriate prior distributions, the model average and fractional difference are estimated by classical and Bayesian methods. In the end, for the Iranian oil export data set, the goodness of fit of the models with the Bayesian approach is compared using the RMSE, Akaike information and Bayesian information criteria, and it is shown that the prediction model based on the Bayesian approach performs better compared to other models.

Keywords: Time series data, evaluation criteria, fractional interval parameter, Bayesian estimation, prediction model.

* Corresponding Author: mesud.fq@pnu.ac.ir

How to Cite: Nasiri, P., Fazlalipour Miyandoab, M. (۲۰۲۰) Oil export modeling using ARFIMA model with Bayesian estimation approach. *Iranian Energy Economics*, ??(?), ???-???

Introduction

Oil is one of the most valuable commodities in the world, and any change in its price can affect every level of economic ecosystems, from household budgets to corporate revenues and even GDP. This chemical is the largest contributor to the world's primary energy supply, followed by coal, gas, renewable energy, and nuclear energy (Bhattacharya, ۲۰۱۹). Iran is currently the third largest producer of crude oil in the world and is considered a global power in the field of energy. A significant part of the country's income is provided through the oil industry every year. In recent decades, the role of oil in Iran's economy and politics has been the subject of extensive and vital debates. In some of these discussions, the prevailing opinion is that oil has provided significant financial resources for consumption and investment in Iran.

In the use of Bayesian estimation and Bayesian analysis articles on ARFIMA models are presented by Cope, Lee, Oswaki, and Steele (۱۹۹۷) and Jeffries and Ravishankar (۱۹۹۶, ۱۹۹۸). However, in presenting the Bayesian estimation of the proposed distribution, the fractional difference parameter is complicated by Nan-Jung-hsu and Bridett (۲۰۰۳).

In the ARFIMA model, the estimation of parameters is one of the important discussions. For the first time, Lu (۱۹۹۱) attempted to estimate the fractional difference parameter (d) in fractional white noise processes by improving the R/S statistic presented by Hurst (۱۹۵۱). Another method in the frequency domain was proposed by Qivik, Porter and Hudak (۱۹۸۳), which is known as the GPH generator method. In the second part of the article, time series models are presented. In the third part, the evaluation criteria of tests are discussed. In the fourth part, the average parameters of the model and the fractional difference are estimated with the Bayesian approach according to the appropriate prior distributions; And in the fifth section, for oil export data, the selection of the model is presented with the help of simulation, taking into account the parameter estimation methods.

Methods and Material

In this section, while introducing time series models to identify the type of model, R/S and GPH tests are discussed. In general, models AR(p), MA(q), according to the distribution of the error sentence, are respectively equal to:

$$\varphi(B)(1-B)^d(X_t - \mu) = \Theta(B)\varepsilon_t$$

In the use of time series models such as AR, ARMA and ARFIM, according to the parameter estimation methods for time series data, it is very important to recognize the model and the goodness of fit. Despite the fact that the Bayesian approach is less used to estimate model parameters. In this article, according to the prior distribution, the Bayesian estimation of the parameters is presented. One of the methods for detecting the long-term memory model in a time series is the use of the GPH test, which is based on a semi-parametric method presented by Jevic and Potter (1993). In practice, after examining the statistical test to evaluate the goodness of fit of the models from the criteria

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N}}, AIC = 2k - 2\ln(\hat{l}) \quad \text{and} \quad BIC = k \ln(n) - 2\ln(\hat{l})$$

are used. Meantime parameter estimation methods play a fundamental role in parameter estimation and the goodness of fit of models. In this article, for the goodness of fit of the model for oil export data, after estimating the relevant model parameters using classical and Bayesian method, the best model is selected with the help of goodness of fit criteria.

Results and Discussion

in the use of parameter estimation methods, by considering the appropriate prior distribution, Bayesian estimation of parameter the fractional difference parameter is presented. According to the discussed time series data and the use of the prior distribution without information, the fractional difference parameter value is equal to 0.5. According to the basic information for calculating the Bayesian estimation of the parameter the fractional difference, the best estimate for d can be provided by changing the prior information and the variance of the error term. Having the value of the fractional difference parameter, it is possible to present the ARFIMA model for the real data using a special algorithm.

Conclusion

By presenting a new method for calculating the fractional difference value of data in an ARFIMA model using the positive step Bayesian

method in order to estimate the parameter of the fractional difference of the data, and have the least error and the most accuracy in the simulation of the investigated time series. A model was proposed for Iran's oil export data from ۱۹۸۰ to ۲۰۲۱, and using it and the new Bayesian method to calculate the differential power, it was determined that in most cases, considering Getting the appropriate prior distribution for the fractional difference value can increase the accuracy of the calculations. This can help researchers make better and more accurate predictions.


Acknowledgments


The authors would like to express their sincere gratitude to the respected editor and also the respected referees for their valuable comments that have greatly contributed to the improvement of this paper. Also, I would like to thank Dr. Mehdi Mohammadi for her literary editing.

Keywords: Time series data, evaluation criteria, fractional interval parameter, Bayesian estimation, prediction model.

JEL Classification: ????

مدل‌های حافظه بلندمدت با رویکردی بیزی و کاربرد آن در صادرات نفت

پرویز نصیری  استاد آمار، گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

مسعود فضلعلی پور
 میان‌دوآب*  استاد آمار، گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

چکیده

مدل‌بندی داده‌های آماری یکی از مباحث مهم است که می‌توان با استفاده از توزیع‌های آماری با توجه به طبیعت داده‌ها مدل مناسب برای آنها ارائه داد. یکی از این مدل‌های آماری برای مدل‌بندی داده‌های سری زمانی، مدل ARFIMA است. این مدل با توجه ساختار کاربرد فراوانی در تحلیل داده‌های اقتصادی، هواشناسی، جغرافیایی، نفت و مالی دارد. در این مقاله مدل‌های سری زمانی، از جمله مدل ARFIMA با فرض اینکه جمله خطا دارای توزیع نرمال است، با رویکرد بیزی مورد بحث قرار می‌گیرد. در به کارگیری مدل‌ها، برای پیش‌بینی بهتر، برای اولین بار ضمن بررسی رفتار مدل‌های بلندمدت، رویکرد بیزی و استفاده از توزیع‌های پیشین مناسب پارامترها میانگین مدل و تفاضل کسری به روش‌های کلاسیک و بیزی برآورد می‌شوند. در پایان برای مجموعه داده‌های صادرات نفت ایران، نیکویی برازش مدل‌ها با رویکرد بیزی با استفاده از معیارهای RMSE، اطلاع آکائیک و اطلاع بیزی مقایسه و نشان داده می‌شود مدل پیش‌بینی ناشی از رویکرد بیزی در مقایسه با سایر مدل‌ها بهتر عمل می‌کند.

کلیدواژه‌ها: داده‌های سری زمانی، معیارهای ارزیابی، پارامتر تفاضلی کسری، برآورد بیزی، مدل پیش‌بینی.

مقدمه

نفت یکی از باارزش‌ترین کالاها در جهان است و هر گونه تغییر در قیمت آن می‌تواند بر هر سطحی از اکوسیستم‌های اقتصادی، از بودجه‌های خانوارها تا درآمدهای شرکتی و حتی تولید ناخالص داخلی تأثیر بگذارد. این ماده شیمیایی بزرگ‌ترین سهم را در تأمین انرژی اولیه جهان دارد و پس از آن زغال‌سنگ، گاز، انرژی‌های تجدیدپذیر و انرژی هسته‌ای قرار دارند (بهاتاچاریا، ۲۰۱۹). ایران در حال حاضر سومین تولیدکننده بزرگ نفت خام در جهان است و یک قدرت جهانی در زمینه انرژی به حساب می‌آید. بخش قابل توجهی از درآمدهای کشور هر ساله از طریق صنعت نفت تأمین می‌شود. در دهه‌های اخیر، نقش نفت در اقتصاد و سیاست ایران موضوع بحث‌های گسترده و حیاتی بوده است. در برخی از این بحث‌ها، نظر غالب این است که نفت منابع مالی قابل توجهی برای مصرف و سرمایه‌گذاری در ایران فراهم کرده است (پسران و همکاران، ۲۰۱۳). علاوه بر اینکه نفت منبع اصلی تأمین انرژی در دنیای امروز است، همچنین نقش اساسی در تعیین قدرت ملی و اعتبار بین‌المللی کشورهای مختلف ایفا می‌کند (بهاتاچاریا، ۲۰۱۹). امروزه در کشور ما یکی از شاخص‌های اصلی بودجه، میزان وابستگی بودجه به نفت است. که به دلیل استفاده از ابزارهای تحریم نفتی برای تحمیل نوسانات اقتصادی بر کشور، میزان وابستگی به بخش نفت اهمیت بیشتری پیدا کرده است، به طوری که در اسناد بالادستی، کاهش وابستگی بودجه به نفت مورد تأکید قرار گرفته است. اما هنوز هم درآمد نفت سهم بزرگی از تولید ناخالص داخلی و بودجه‌های سالانه ایران را به خود اختصاص می‌دهد و اقتصاد ایران به سمت یک پایه صادراتی تک‌محصولی پیش می‌رود (دیر، ۲۰۲۱). این موضوع نشان می‌دهد که قیمت نفت و درآمدهای آن به عنوان عوامل مؤثر بر رونق و رکود اقتصادی در ایران در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین، نوسانات قیمت نفت بر اکثر متغیرهای اقتصادی تأثیر خواهد گذاشت (سلطان و حق، ۲۰۱۸).

پیشینه پژوهش

تحقیقات زیادی به بررسی برآزش مدل حافظه بلندمدت در داده‌های اقتصادی انجام پذیرفته به طوری که مندلبروت (۱۹۷۱) اولین کسی بود که ایده وجود حافظه بلندمدت در بازده دارایی‌ها را بیان کرد. گرین و فیلیتز (۱۹۷۷) با استفاده از آزمون دامنه استاندارد شده (R/S)

کلاسیک، بازده روزانه شاخص بورس نیویورک را مورد مطالعه قرار دادند و دلایل قوی بر وجود حافظه بلندمدت در آن ارائه دادند. لو (۱۹۹۱) با تغییر آماره R/S دینامیک حافظه کوتاه‌مدت نتیجه گرفت که شواهد روشنی مبنی بر وجود حافظه بلندمدت در بازده شاخص بورس نیویورک موجود نمی‌باشد. گرو-کارلیس (۲۰۰۰) با مطالعه رفتار بازده روزانه پنج شاخص سهام مهم دنیا ارائه داد. بارکولاس و باوم (۱۹۹۶) به جای استفاده از آماره R/S ، از روش (GPH Geweke & Porter-Hudak) که توسط جویک و پورتر-هاداک (۱۹۸۳) ارائه شده بود، برای آزمون مدل‌های حافظه بلندمدت در بازده شاخص، صنعت و همچنین بازده سهام شرکت‌های حاضر در شاخص داو جونز استفاده کردند. هرچند آن‌ها شواهدی مبنی بر وجود حافظه بلندمدت در شاخص سهام نیافتند، در ادامه بحث‌های برآورد پارمترهای مدل ARFIMA روش‌های تقریبی با استفاده از روش ماکسیمم درست‌نمایی توسط رافتری و هاسلت (۱۹۸۹) و لی هوسکینگ (۱۹۸۴) ارائه شد. سئویل (۱۹۹۲) روش برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارمترهای مدل ARFIMA را به صورت دقیق ارائه کرد.

چانگ و ییلی (۱۹۹۳) روش‌های حداقل مربعات شرطی (CCS) را پیشنهاد کردند و نشان دادند که روش CCS به اندازه روش دقیق ماکسیمم درست‌نمایی سوول (۱۹۹۲) سودمند است و متذکر شدند نتیجه‌ی روش CCS وقتی که مدل مورد بررسی، اتورگرسیو است با روش بران (۱۹۹۴) یکسان می‌شود. ارول اروغلو و سلیمان گونی (۲۰۱۰) دو روش جدید با استفاده از روش RJMCMC برای انتخاب مدل و تخمین پارمتر در مدل‌های ARFIMA پیشنهاد دادند. اولین روش پیشنهادی، مبتنی بر روش دو مرحله‌ای Hosking است. روش دوم پیشنهادی، رویکرد یک مرحله‌ای است. دو روش پیشنهادی با روش ماکسیمم درست‌نمایی تقریبی رافتری و هاسلت (۱۹۹۸) با روش CCS و معیارهای انتخاب مدل کلاسیک مقایسه شده‌اند. آنها نشان دادند که روش‌های مورد استفاده در بیشتر موارد از روش‌های کلاسیک بهتر عمل می‌کنند.

در استفاده از برآورد بیزی و مقالات تحلیل بیزی مدل‌های ARFIMA توسط کوپ، لی، اوسواکی و استیل (۱۹۹۷) و جفریس و راویشنکر (۱۹۹۶، ۱۹۹۸) ارائه شده است. هر چند در ارائه برآورد بیزی توزیع پیشنهادی، پارمتر تفاضل کسری توسط نان جونگ هسو و بریدت (۲۰۰۳) پیچیده است. اما آن‌ها اشاره می‌کنند که روش جفریس و راویشنکر (۱۹۹۶)، از نظر محاسباتی دشوار هستند و به زمان زیادی نیاز دارند. به همین خاطر نان جونگ

هسو و بریدت (۲۰۰۳) از مدل‌های تقریبی ARFIMA با استفاده از مدل‌های اتورگرسیو میانگین متحرک (ARMA) استفاده کردند. اگر بتوان در روش بیزی چالش‌های محاسباتی را کاهش داد، برآورد پارامترهای مدل ARFIMA با این روش مزیت‌هایی نسبت به روش‌های کلاسیک، از جمله انعطاف‌پذیری در مشخص کردن توزیع‌های پیشین خواهد داشت. این توانایی باعث کم شدن تأثیرات جنبه‌های دیگر الگوریتم و داده‌های مدل، مانند اثرات حافظه کوتاه یا فصلی و مشاهدات از دست رفته می‌شود، به طوری که می‌توان مواردی را در مورد اثرات حافظه طولانی بدون قید و شرط بیان کرد.

امروزه بر خلاف رویکرد کلاسیک مدل‌بندی، داده‌های اقتصادی، مالی، کشاورزی با استفاده از مدل‌های AR، MA، ARMA و ARIMA توان محاسبه دقیق و مفید را ندارند. پدیده‌هایی مانند درآمد، نرخ تورم، مجموعه‌های پولی و مالی و سری داده‌های تولید ناخالص داخلی دیگر با این مدل‌ها قابل قالب‌بندی نیستند و محققان را مجاب می‌کنند که از مدل‌هایی همانند مدل‌های بلند مدت بهره بگیرند. و دلیل اصلی آن هم قابلیت تعمیم و تبدیل آن به مدل‌های اتورگرسیو میانگین متحرک (ARMA) و مدل نویز گاوسی است. علاوه بر آن یکی از ویژگی‌های کلیدی مدل ARFIMA انعطاف‌پذیری در مدل‌سازی همزمان و در عین حال جداگانه حافظه بلندمدت و کوتاه‌مدت است. این مدل اولین بار توسط گرنجر و جویوکس (۱۹۸۰) معرفی شد.

در مدل ARFIMA برآورد پارامترها یکی از بحث‌های مهم است که اولین بار لو (۱۹۹۱) با بهبود آماره R/S که توسط هرست (۱۹۵۱) ارائه شده بود اقدام به تخمین پارامتر تفاضل کسری (d) در فرآیندهای نویز سفید کسری نمود. روش دیگری در محیط فرکانس توسط قیویک، پورتر و هوداک (۱۹۸۳) پیشنهاد شده که به روش برآورنده GPH مشهور است. همچنین روش دیگری - که آن هم در محیط فرکانس است - توسط رایینسون (۱۹۹۴) ارائه شده است. روش‌های مبتنی بر خودهمبستگی، توسط رایینسون (۱۹۹۰) و تیسلاو، اشمیت و بیلی (۱۹۹۶) بیان شده‌اند. در برآورد پارامترهای ARFIMA، روش دومرحله‌ای توسط هاسکینگ (۱۹۸۱) بیان گردید که در مرحله نخست این روش، راهکارهای مختلفی مانند روش GPH و در مرحله دوم، روش باکس جنکینز استفاده شده است. روش دومرحله‌ای هاسکینگ با روش‌های برآورد ماکسیمم درست‌نمای که توسط اسمیت، نیک و یاداو (۱۹۹۷) با روش رایسن، آبراهام و لوپس (۲۰۰۱) با استفاده از روش شبیه‌سازی مقایسه شده

است. اسمیت و همکاران (۱۹۹۷) نشان دادند که در تخمین پارامتر و انتخاب مدل، روش‌های تخمین ماکسیمم درست‌نمایی از روش تخمین دو مرحله‌ای هاسکینگ بهتر عمل می‌کنند. رایزن و همکاران (۲۰۰۱) به این نتیجه رسیدند تکرارهای اول تا سوم در روش تخمین دو مرحله‌ای هاسکینگ برای اهداف عملی کافی است.

یکی از مفاهیم مهم در بررسی سری‌های زمانی وابستگی بین مشاهدات دور افتاده است که از آن به عنوان ملاک حافظه بلندمدت در سری‌های زمانی یاد می‌کنند. میزان همبستگی در نوع سری‌های زمانی از حیث اینکه کوتاه‌مدت یا بلندمدت است، بین مشاهده X_t و X_{t+k} به ترتیب برابرند با:

$$|\rho(k)| \leq cr^{-k} ; c \neq 0, k = 1, 2, \dots ; 0 < r < 1 \quad (1)$$

$$|\rho(k)| \approx ck^{2d-1} ; C \neq 0 \text{ و } -0.5 < d < 0.5 \quad (2)$$

که در آنها c یک عدد مثبت و بزرگتر از صفر است. قابل ذکر است در سری‌های زمانی با توجه به تابع خودهمبستگی، میزان همبستگی به صورت هیپربولیک کاهش پیدا می‌کند. و در صورتی که همبستگی بین مشاهدات دور افتاده، ضعیف باشد سری‌های زمانی مورد بررسی به عنوان حافظه کوتاه‌مدت شناخته می‌شود. و معمولاً در این سری‌های زمانی نمودار همبستگی به صورت نمایی است. در ادامه مقاله در بخش دوم مدل‌های سری زمانی ارائه می‌شود. در بخش سوم معیارهای ارزیابی آزمون‌ها مورد بحث قرار می‌گیرد. در بخش چهارم پارامترهای میانگین مدل و تفاضل کسری با رویکرد بیزی با توجه به توزیع‌های پیشین مناسب برآورد می‌شوند؛ و در بخش پنجم برای داده‌های صادرات نفت به کمک شبیه‌سازی انتخاب مدل با در نظر گرفتن روش‌های برآورد پارامترها ارائه می‌شود.

مدل‌ها

در این بخش ضمن معرفی مدل‌های سری زمانی برای تشخیص نوع مدل، آزمون‌های R/S و GPH مورد بحث قرار می‌گیرد. در حالت کلی مدل‌ها $AR(p)$ ، $MA(q)$ ، $ARIMA(p, d, q)$ با توجه به توزیع جمله خطا $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ به ترتیب برابرند با:

$$\varphi(B)(1-B)^d (X_t - \mu) = \Theta(B)\varepsilon_t \quad (3)$$

باید در نظر گرفت. که در آن $\Theta(B) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j B^j$ و $\varphi(B) = 1 - \sum_{j=1}^p \varphi_j B^j$ است. به طوری که

الف- ریشه‌های $\varphi(B)$ و $\Theta(B)$ خارج از دایره‌ای به شعاع یک باشند.

$$\text{ب- } -\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2} \text{ یا } |d| < \frac{1}{2}$$

ج- همیشه از $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ یکسان نباشند و $\varphi_p \neq 0$ باشد.

$$\text{د- } \sigma_\varepsilon^2 > 0$$

در استفاده از مدل‌های سری زمانی از جمله AR، ARMA، ARFIM با توجه به روش‌های برآورد پارامترها برای داده‌های سری زمانی تشخیص مدل و نیکویی برازش از اهمیت زیادی برخوردار است. علی‌رغم این که کمتر از رویکرد بیزی برای برآورد پارامترهای مدل استفاده شده است. در این مقاله با توجه به توزیع پیشین، برآورد بیزی پارامترها در بخش چهارم ارائه می‌شود.

آزمون‌ها و معیارهای آماری

با توجه به مدل‌های اتورگرسیو، میانگین موزون و ARFIMA، مدل‌های اتورگرسیو و میانگین موزون قاعدتاً برای داده‌های کوتاه مدت مورد استفاده قرار می‌گیرد. اما برای بررسی داده‌های سری زمانی از حیث اینکه دارای مدل حافظه بلند مدت است، نیاز است برای تشخیص مدل از آزمون‌های حافظه بلندمدت آزمون دامنه مقیاس بندی شده یا دامنه بر روی انحراف معیار استفاده شود. اولین بار هارست (۱۹۵۱) آزمونی جهت تشخیص مدل ارائه و در ادامه مندرلیروت و همکارانش (۱۹۶۸) آن را بیشتر گسترش دادند. برای این منظور اگر X_t سری زمانی به ازای $t = 1, 2, \dots, T$ باشد، برای تشخیص مدل از حیث اینکه کوتاه مدت و بلند مدت است از آزمون‌های R/S و GPH استفاده می‌شود. به طوری که آماره آزمون R/S برابر است با:

$$Q_t = \sqrt{\frac{T}{\sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X})^2}} \left[\max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}) - \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}) \right] \quad (4)$$

که در آن $\bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T X_i$ است. یکی دیگر از روش‌های تشخیص مدل حافظه بلندمدت در یک سری زمانی استفاده از آزمون GPH می‌باشد که بر مبنای یک روش نیمه پارامتریک است که توسط جیویک و پوتر (۱۹۸۳) ارائه شده است. در عمل پس از بررسی آزمون آماری برای ارزیابی نیکویی برازش مدل‌ها از معیارهای

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N}} \quad (5)$$

$$AIC = 2k - 2\ln(\hat{l}) \quad (6)$$

$$BIC = k \ln(n) - 2\ln(\hat{l}) \quad (7)$$

استفاده می‌شود. که در آن k تعداد پارامتر، N تعداد مشاهدات و \hat{l} مقدار برآورد تابع ماکسیمم درست‌نمایی است. لازم به ذکر است مقدار کم هر کدام از معیارها AIC، BIC و RMSE مربوطه نشان‌دهنده آن است که مدل مورد نظر نسبت به بقیه مدل‌ها، بهتر و مناسب‌تر است.

برآورد پارامترهای مدل

تاکنون روش‌های مختلف برای برآورد پارامترهای مدل‌ها ARFIMA ارائه شده که برای اطلاع بیشتر می‌توان به مقالات کراو و همکاران (۲۰۱۵) و وان و همکاران (۲۰۲۲) مراجعه کرد. در برآورد پارامترها و نیکویی برازش مدل‌های روش‌های برآورد پارامترها نقش اساسی دارد. در این مقاله برای نیکویی برازش مدل برای داده‌ها صادرات نفت پس از برآورد پارامترهای مدل مربوطه با استفاده از روش کلاسیک و بیزی، به کمک معیارهای نیکویی برازش بهترین مدل انتخاب می‌شود. در رویکرد بیزی برای برآورد پارامترهای μ و σ_ε^2 توزیع‌های پیشین مناسب در نظر گرفته می‌شوند. در اینجا برای برآورد بیزی پارامتر μ ، توزیع پیشین برای آن توزیع نرمال با میانگین τ و واریانس σ_μ^2 به صورت

$$g(\mu | \tau, \sigma_\mu^2) = \frac{1}{\sigma_\mu \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_\mu^2}(\mu - \tau)^2}, -\infty < \mu < +\infty \quad (8)$$

در نظر گرفته می‌شود. که با توجه به توزیع شرطی μ به شرط τ می‌توان توزیع پیشین را به فرم

$$\pi(\tau) = \frac{1}{b-a}, a < \tau < b \quad (9)$$

در نظر گرفت. که در آن a و b ابر پارامترها هستند. و مقادیر آن‌ها با توجه به اطلاعات موجود انتخاب می‌شوند. بنابراین توزیع توام برابر است با:

$$g(\mu, \tau) = g(\mu | \tau, \sigma_\mu^2) \pi(\tau) = \frac{1}{(b-a)\sigma_\mu \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_\mu^2}(\mu-\tau)^2} \quad (10)$$

که با استفاده از آن توزیع پسین برابر است با:

$$\pi(\tau | \mu) = \frac{g(\mu, \tau)}{\int_a^b g(\mu, \tau) d\tau} = \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma_\mu^2}(\mu-\tau)^2}}{\int_a^b e^{-\frac{1}{2\sigma_\mu^2}(\mu-\tau)^2} d\tau} \quad (11)$$

با توجه به رابطه (۱۱) برآورد بیزی پارامتر τ برابر است با:

$$\hat{\tau}_{Bayes} = \frac{\int_a^b \tau e^{-\frac{1}{2\sigma_\mu^2}(\mu-\tau)^2} d\tau}{\int_a^b e^{-\frac{1}{2\sigma_\mu^2}(\mu-\tau)^2} d\tau} \quad (12)$$

برآورد بیزی τ کمک می‌کند که استنباط دقیقی از پارامتر μ داشته باشیم، که برای اثرگذاری، می‌توان از توزیع گاما معکوس برای σ_μ^2 به عنوان توزیع پیشین در نظر گرفت. با توجه به استنباط بیزی، می‌توان مدل‌های با حافظه بلندمدت را به فرم

$$\left(1 - \sum_{i=1}^p \phi_i B^i\right) (1-B)^d (X_t - \mu) = \left(1 + \sum_{i=1}^q \theta_i B^i\right) \varepsilon_t \quad (13)$$

در نظر گرفت که پارامتر d نقش اساسی دارد. لذا با توجه به اهمیت آن در انعطاف‌پذیری مدل‌های ARFIMA با حافظه بلندمدت، چان و پالما (۱۹۹۸) برای برآورد آن نمایش‌های مدل‌های اتورگرسو یا میانگین متحرک بی‌نهایت را به صورت تأخیرهای محدود نمایش داده

و حداکثر احتمال تقریبی را به دست آورند. و از مدل ARFIMA در چارچوب یک فضای حالت از روش ماکسیمم درست‌نمایی تقریبی بهره گرفتند. به طوری که برای برآورد پارامتر d چان و پالما (۱۹۹۸) نشان دادند که فضای حالت برآوردگر مدل بر اساس حداکثر احتمال تقریبی دارای ویژگی‌های مجانبی مطلوب و دارای سرعت همگرایی بیشتری است. گراسی و مجستریس (۲۰۱۴) یک مطالعه شبیه‌سازی شده برای مقایسه برآورد پارامترهای مدل‌های حافظه بلندمدت مبتنی بر مدل فضای حالت با برخی روش‌های پارامتری و نیمه پارامتری به طور گسترده انجام دادند و نشان دادند که روش چان و پالما (۱۹۹۸) در مقایسه با دیگر روش‌ها، بهتر عمل می‌کند. ضمناً قابل ذکر است که چان و پالما (۱۹۹۸) و گراسی و مجستریس (۲۰۱۴) عمدتاً d را در بازه صفر تا $0/4$ مطالعه کردند. اما فردریک آندرسون و بوشولی (۲۰۱۹)، برای آن d مقادیر به صورت $0/98, 0/95, 0/9, 0/8, 0/7, 0/48, 0/45, 0/4, 0/3$ و $0/2$ در نظر گرفتند. حال برای برآورد بیزی پارامتر d با توجه به توزیع پیشین

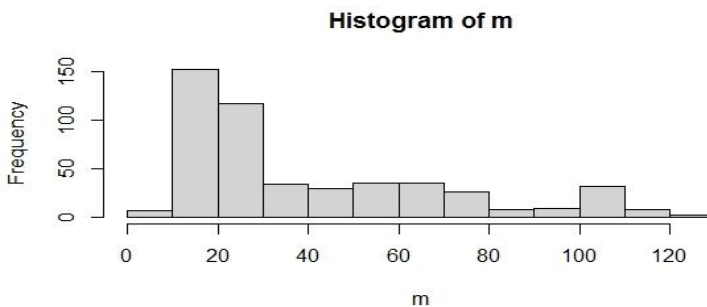
$$\pi(d) = 1, -\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2} \quad (14)$$

می‌توان از برآورد بیزی آن استفاده کرد. می‌شود برای اطلاع بیشتر به مقاله فضلعلی پور و همکاران (۲۰۲۳) مراجعه کرد. در استفاده از برآورد بیزی پارامتر تفاضل کسری یا d می‌توان از نرم‌افزارهای آماری استفاده کرد.

انتخاب مدل و شبیه‌سازی

در این بخش با توجه به رویکرد بیزی، پس از برآورد پارامترهای μ و d با استفاده از توزیع‌های پیشین نیکویی برازش مدل‌ها برای داده‌های صادرات نفت ایران بر حسب میلیون بشکه در ماه که از سایت بانک مرکزی استخراج شده، ارائه و مقایسه می‌شوند. در این مقاله مدل بندی داده‌های صادرات نفت خام ایران از سال ۱۳۵۹ تا ۱۴۰۰ (۱۹۸۰ تا ۲۰۲۱) با استفاده از مدل‌های سری زمانی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در توصیف داده‌ها مورد بررسی شاخص‌های مربوطه و همچنین هیستوگرام به ترتیب در شکل ۱ و جدول ۱ آورده شده است.

شکل ۱. نمودار میزان صادرات نفت بر حسب میلیون بشکه در بین سال های ۱۹۸۰ تا ۲۰۲۱

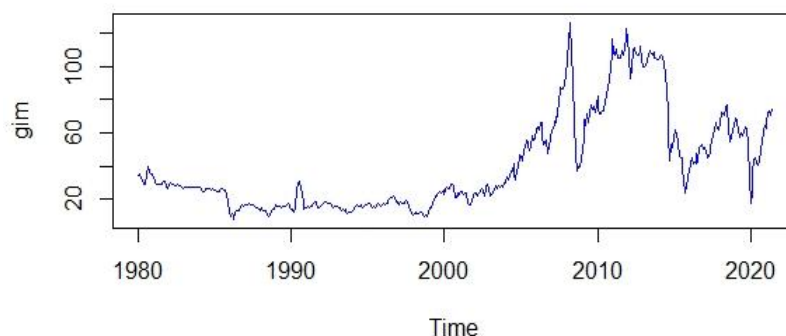


جدول ۱. شاخص های آمار توصیفی صادرات نفت ایران بین سالهای ۱۹۸۰ تا ۲۰۲۱

min	Q ₁	میانه	میانگین	Q ₃	max
۷/۶	۱۷/۲۰	۲۸/۰۵	۴۰/۸۶	۵۸/۰۵	۱۲۶/۸۰

برای ارائه مدل سری زمانی در گام اول نمودار خودهمبستگی، در گام دوم مانا بودن سری، گام سوم نتایج آزمون های مانایی با استفاده از آزمون دیکی-فولر تعمیم یافته (ADF)، آزمون فیلیپس-پرون (PP) و همچنین آزمون کووسکی، فیلیپس، اشمیت، شین (KPSS)، در گام چهارم برای ارزیابی نیکویی برازش مدل از معیارهای آکائیک (AIC) و معیار اطلاع بیزی (BIC) استفاده و در گام پنجم برآورد پارامترهای تفاضل کسری و ضرایب مدل، آورده شده است. برای این منظور ابتدا نمودار کلی داده های صادرات نفت خام ایران در شکل ۲ به صورت زیر آورده شده است.

شکل ۲. نمودار میزان صادرات نفت خام ایران از سال ۱۹۸۰ تا ۲۰۲۱ بر حسب قیمت (دلار)



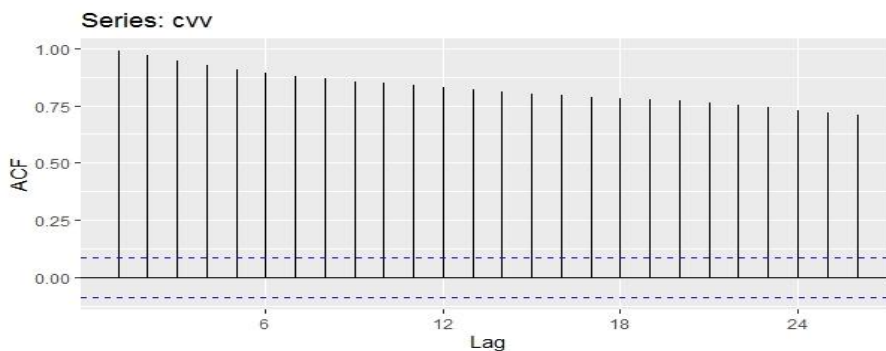
همان‌گونه که از نمودار داده‌ها مشخص است سری زمانی دارای روند است و مانا نیست و برای بررسی آن نتایج آزمون‌های دیکی- فولر تعمیم یافته (ADF)، آزمون فیلیپس- پرون (pp) و همچنین آزمون کووسکی، فیلیپس، اشمیت، شین (KPSS) در جدول ۲ آورده شده است.

جدول ۲. نتایج آزمون بررسی پایایی داده‌های میزان صادرات نفت ایران بر حسب میلیون بشکه درماه

آزمون	آزمون فیلیپس - پرون		آزمون KPSS		آزمون‌های دیکی فولر	
	آماره و p-مقدار	p-value	آماره	p-value	آماره	p-value
صادرات نفت	-۱۵/۹۵	۰/۲۱۹۶	۴/۷۰۴	۰/۰۱	-۲/۷۴	۰/۲۶۲۹

با توجه به نتایج جدول ۲ آزمون‌های دیکی- فولر تعمیم یافته و همچنین فیلیپس - پرون با توجه به اینکه $p\text{-value} < ۰/۰۵$ نیست مانایی داده‌ها تأیید نمی‌شود ولی در آزمون kpss چون مقدار $p\text{-value} < ۰/۰۵$ است، با توجه به ساختار این آزمون فرض مانا بودن این داده‌ها تأیید می‌شود. و چون آزمون KPSS در رابطه با مانایی از قدرت بالایی برخوردار است. پس مانا بودن داده‌ها تأیید می‌شود. برای بررسی الگو داده‌ها، نمودار خودهمبستگی (acf) در شکل ۳ آورده شده است. با توجه به نمودار فوق وضعیت به صورت هیبرولیکی است و می‌توان وجود حافظه بلندمدت را در این مورد، مورد ارزیابی قرار داد. برای این منظور از آزمون‌های وجود حافظه بلندمدت از جمله R/S و GPH استفاده می‌شود، که نتایج آن در جدول ۳ آورده شده است.

شکل ۳. نمودارهای خودهمبستگی صادرات نفت ایران بین سالهای ۱۹۸۰ تا ۲۰۲۱



جدول ۳. مقدار آماره R/S و GPH با مقدار d برآورد شده

سری زمانی	روش	برآورد d	Sd
صادرات نفت	R/S	۰/۸۵۴۸	۰/۰۷۱۴
	GPH	۰/۸۵۶۸	۰/۱۷۰۰

با توجه به نتایج جدول ۳ مقادیر d با توجه به آزمون‌های R/S و GPH به ترتیب ۰/۸۵۴۸ و ۰/۸۵۶۸ است. برای بررسی نوع مدل ARFIMA از معیار اطلاع حنان - کوئین در نرم‌افزار R بهره گرفته که بهترین الگو برای داده‌ها با توجه به اینکه کمترین AIC مربوط به الگوی ARFIMA (۲, d, ۳) می‌باشد به عنوان الگوی مورد نظر انتخاب می‌شود. که نتایج برخی از حالات آن در جدول ۴ آورده شده است.

جدول ۴. مقدار آماره R/S و GPH با مقدار d برآورد شده

الگو	ARFIMA(۱, d, ۱)	ARFIMA(۳, d, ۱)	ARFIMA(۲, d, ۱)	ARFIMA(۲, d, ۳)	ARFIMA(۲, d, ۰)
AIC	۵/۷۱	۵/۵۰۷	۵/۵۰	۵/۴۶۸	۵/۵۲

توجه به نتیجه حاصل از جدول ۴ الگوی مورد نظر ARFIMA(2d, 3) است که مقادیر برآورد پارامترها در جدول ۵ آورده شده است.

جدول ۵. محاسبه مقادیر پارامتر الگوی ARFIMA(2d, 3)

	برآورد پارامتر	انحراف معیار	t-value	(Pr(> t))
AR(۱)	۱/۷۲۵	۰/۰۰۰۱۰۰	۰/۲۱	۰/۰۰
AR(۲)	-۰/۹۹۸۰	۰/۰۰۰۰۱۲	۷۴۸۵۷/۲۸	۰/۰۰
MA(۱)	۰/۵۹۳	۰/۰۰۰۰۴۳	۳۴۹۲۶/۶۱	۰/۰۰
MA(۲)	۰/۰۹۲	۰/۰۰۰۰۱۵	۵۱۱۳۵/۸۲	۰/۰۰
MA(۳)	۰/۲۰۶	۰/۰۰۰۰۱۶	۱۷۲۳۸	۰/۰۰

بنابراین با توجه به نتایج جدول‌های ۳ و ۵ مدل برآورد شده به فرم

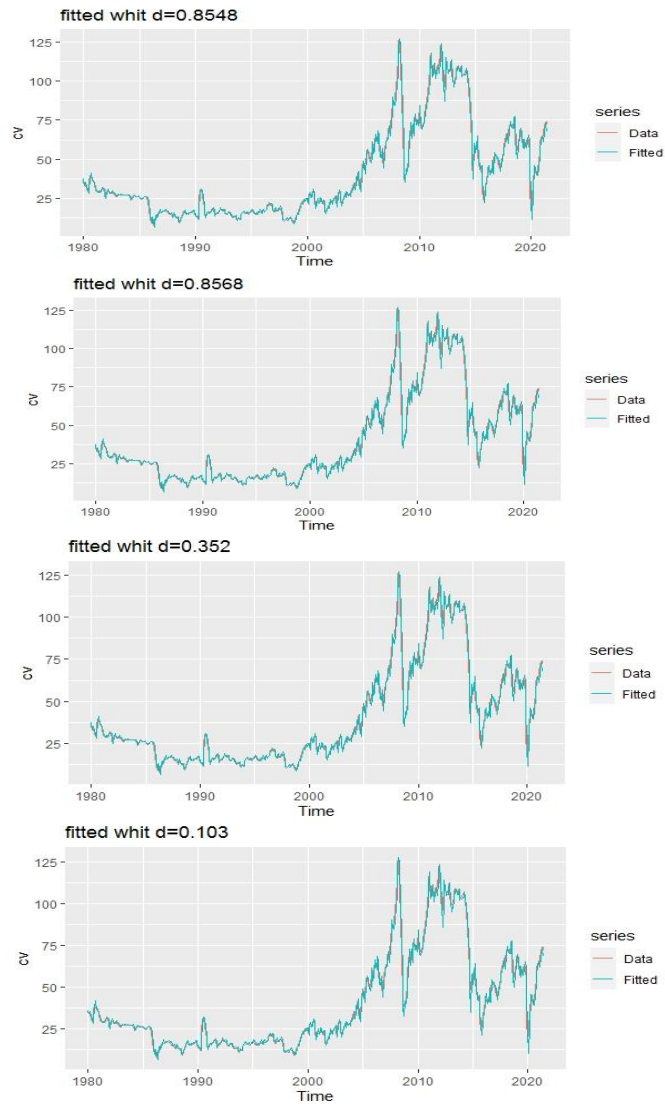
$$\begin{aligned} (1-1/725B + 0/998B^2)(1-B)^{(0.352)} X_t \\ = (1+0/593B + 0/092B^2 + 0/206B^3)\varepsilon_t \end{aligned} \quad (15)$$

می‌باشد. با توجه به در اختیار داشتن مدل فوق می‌توان داده‌هایی تولید کرد که با داده‌های اولیه قابل مقایسه و قابل پیش‌بینی باشند. در ادامه برای استفاده از استنباط بیزی و با در نظر گرفتن توزیع پیشین مناسب با برآورد بیزی پارامتر d ارائه می‌شود. با توجه به داده‌های سری زمانی مورد بحث و استفاده از توزیع پیشین فاقد اطلاع مقدار d برابر ۰/۸۵ است با توجه به اطلاعات اولیه محاسبه برآورد بیزی پارامتر d می‌توان با تغییر اطلاع پیشین و واریانس جمله خطا بهترین برآورد برای d ارائه داد. با داشتن مقدار d می‌توان با استفاده از الگوریتم خاص، مدل ARFIMA را برای داده واقعی ارائه داد. در این بخش با توجه به مقدار برآورد بیزی d و رتبه‌های ARFIMA نمونه‌های شبیه‌سازی برای اندازه مختلف تولید و سپس از محاسبه شاخص‌ها مدل با مدل اولیه برای داده‌های داده شده مقایسه کرد. و نشان داد که برآورد بیزی می‌تواند کارایی برآورد پارامترهای مدل را بهبود بخشد. با توجه به نتایج شبیه‌سازی که در جدول ۶ و همچنین نمودار داده‌های واقعی با مقادیر d های برآورد شده در شکل ۴ آورده شده، می‌توان گفت مدل ارائه شده با توجه به برآورد بیزی بهتر عمل می‌کند.

جدول ۶. مقدار AIC برای مدل ARFIMA با d های برآورد شده به روش‌های مختلف

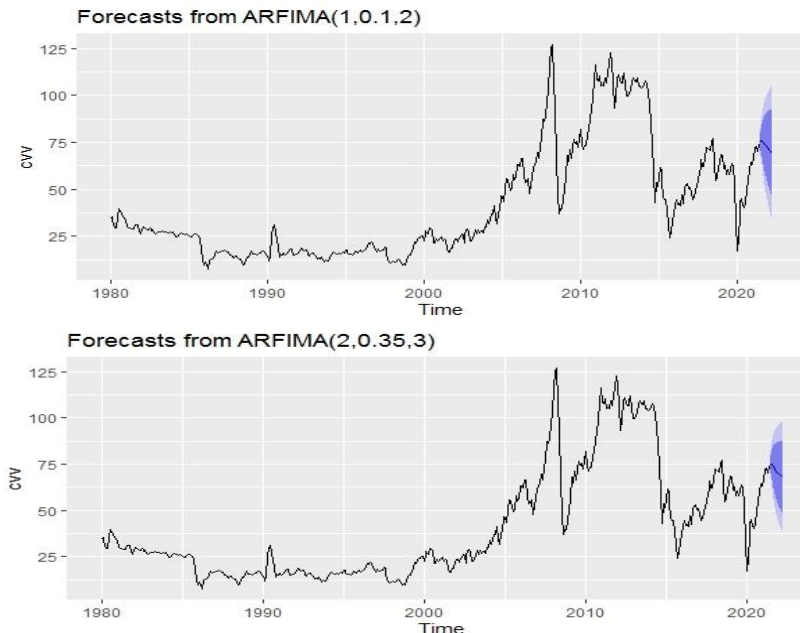
برآورد	روش	نماد	مقدار	AIC
\hat{d}	بیزی	d_b	۰/۳۵۲	۳۳/۳۴
	کلاسیک	d_o	۰/۱۰۳	۳۴/۰۴
	R/S	$d_{r/s}$	۰/۸۵۴۸	۴۳/۹۹
	GPH	d_{GPH}	۰/۸۵۶۸	۴۳/۷۴

شکل ۴. نمودارهای برازنده شده برای داده‌های صادرات نفت ایران بین سالهای ۱۹۸۰ تا ۲۰۲۱



با توجه به مقادیر برآورد شده پارامتر تفاضل ناشی از برآوردی بیزی و کلاسیک که مقدار آن‌ها به ترتیب با ۰/۳۵۴ و ۰/۱۰۳ می‌باشند، نمودارهای پیش‌بینی در نمودار ۵ آورده شده است.

شکل ۵. نمودارهای پیش‌بینی شده صادرات نفت ایران با $d=0,103, d=0,352$



بحث و نتیجه‌گیری

برای کشورهای در حال توسعه، نفت عنصر اساسی توسعه و رشد اقتصادی است. به‌ویژه در ایران، درآمدهای حاصل از صادرات نفت بخش مهم و اصلی از بودجه را تشکیل داده و یکی از منابع مهم ارز خارجی است. بنابراین، پیش‌بینی میزان صادرات براساس مدل‌های آماری نقش مهم در برنامه‌ریزی بودجه کشور ایفا می‌کند. در این مقاله میزان صادرات نفت در ایران از سال ۱۹۸۰ تا ۲۰۲۱ مورد پردازش قرار گرفته است. در ابتدا از آزمون‌های ریشه واحد ساختاری دیگری-فولر برای ارزیابی یکپارچگی داده‌ها استفاده شده است و در مرحله بعد، از روش بیزی برای تعیین رابطه بلندمدت بین متغیرها استفاده شد. در بسیاری از سری‌های زمانی به‌ویژه داده‌های مالی، اقتصادی و هواشناسی مقدار مورد انتظار و نوسانات تمایل به بازگشت به میانگین خود دارند هر چند سرعت و میزان آن در موارد مختلف متفاوت باشد. و این اهمیت میانگین و برآورد آن در یک سری زمانی را نشان می‌دهد. با این دیدگاه در این مقاله سعی شد با ارائه یک روش جدید برای محاسبه مقدار تفاضلی داده‌ها در یک

مدل ARFIMA با استفاده از روش بیزی گامی مثبت در جهت برآورد خوب توان تفاضلی (d) داده‌ها برداشته شده و کمترین خطا و بیشترین دقت را در شبیه‌سازی سری‌های زمانی مورد بررسی داشته باشند. الگوی $ARFIMA(20/352,3)$ برای داده‌های صادرات نفت ایران از سال ۱۹۸۰ تا ۲۰۲۱ پیشنهاد شد و با استفاده از آن و روش جدید بیزی محاسبه توان تفاضلی مشخص کرد که در اکثر موارد با در نظر گرفتن توزیع پیشین مناسب برای تفاضل داده‌ها (d) می‌توان دقت محاسبات را افزایش داد. این امر می‌تواند محققان را در پیش‌بینی بهتر و دقیق‌تر یاری برساند. از سوی دیگر، مهم‌ترین سیاستی که باید در زمینه نفت دنبال شود، جلوگیری از صادرات نفت خام و تنوع‌بخشی به سبد صادرات کشور از طریق تبدیل نفت خام به محصولات نفتی و پتروشیمی به وسیله توسعه پالایشگاه‌ها و صنایع پتروشیمی در کشور است. مزایای این سیاست شامل خصوصی‌سازی صنایع بزرگ کشور، کاهش اندازه دولت، اشتغال‌زایی گسترده و در نهایت رشد اقتصادی است.

سیاست دیگری که باید دنبال شود؛ حرکت به سمت تکمیل زنجیره ارزش صنعت نفت برای کاهش صادرات نفت خام است. ایران نیاز دارد که دانش فنی را در فرآیندهایی که نقش کلیدی در دستیابی به اهداف بلندمدت پایین‌دستی صنعت نفت دارند، بومی‌سازی کند. البته این نیازمند یک برنامه مدون برای توسعه پایدار صنایع پایین‌دستی صنعت نفت است. همچنین، یکپارچگی مدیریت، مالکیت و عملیات پایین‌دستی از الزامات انطباق با بازارهای جهانی است. بنابراین، ادغام شرکت پالایش و پخش فرآورده‌های نفتی و شرکت ملی پتروشیمی و تعریف پروژه‌های پتروپالایشگاهی به‌جای پروژه‌های جداگانه پالایش و پتروشیمی باید از برنامه‌های اصلی وزارت نفت باشد. در نهایت، نیاز به ایجاد یک نهاد تنظیم‌گر کوچک، قوی و یکپارچه در پایین‌دستی صنعت نفت داریم تا یکپارچگی در سرتاسر زنجیره ارزش نفت حفظ شود.

سپاسگزاری

نویسندگان مایلند از ویراستار و داوران محترم به خاطر نظرات ارزشمندشان که به بهبود این مقاله کمک شایانی کرده‌اند صمیمانه تشکر و قدردانی کنند. همچنین از جناب آقای دکتر مهدی محمدی بابت ویرایش ادبی ایشان تشکر می‌کنیم.

ORCID

Parviz nasiri  <https://orcid.org/0000-0002-0827-4853>
Masoud Fazlalipour  <https://orcid.org/0000-0001-9425-5159>
Miyandoab

References

- Bhattacharyya, S., C., (۲۰۱۹). *Energy Economics: Concepts, Issues, Markets and Governance*. Spring-Verlag London Ltd. ۲nd Edition.
- Beran, J.: (۱۹۹۴) *Statistics for Long Memory Processes*, Chapman Hall, New York.
- Chan, N. H., & Palma, W. (۱۹۹۸). *State space modeling of long-memory processes*. *Annals of Statistics*, ۲۶(۲), ۷۱۹-۷۴۰.
- Chung, C. F., & Baillie, R. T. (۱۹۹۳). *Small sample bias in conditional sum of squares estimators of fractionally integrated ARMA models*. *Empirical Economics*, ۱۸, ۷۹۱-۸۰۶.
- Deputy of Economic Research (DER), (۲۰۲۱). *Review of the budget bill for the year ۱۴۰۰ for the country*. Available at <https://rc.majlis.ir/fa/report/download/۱۶۳۲۲۸۵> (accessed ۱۵ February ۲۰۲۱).
- Durham, G., Geweke, J., Porter-Hudak, S., Sowell, F. (۲۰۱۹). *Bayesian inference for ARFIMA models*. *Journal of Time Series Analysis*, ۴۰(۴), ۳۸۸-۴۱۰.
- Egriglu, E., Gunay, S. (۲۰۱۰): *Bayesian model selection in ARFIMA models*, *Expert Sys. Appl.*, ۳۷, ۸۳۵۹-۸۳۶۴.
- Fredrik N. G. Andersson, Yushu Li (۲۰۱۹). *Are Central Bankers Inflation Nutters? An MCMC Estimator of the Long-Memory Parameter in a State Space Model*. *Computational Economics* ۵۵:۵۲۹-۵۴۹.
- Garland D, John G, Susan PH, et al. (۲۰۱۹). *Bayesian inference for ARFIMA models*. *J Time Ser Anal.*; ۴۰:۳۸۸-۴۱۰.
- Geweke J, Porter-Hudak S. (۱۹۸۳). *The estimation and application of long memory time series models*. *J Time Ser Anal*; ۴:۲۲۱-۲۳۸.
- Geweke J. (۲۰۰۵). *Contemporary Bayesian econometrics and statistics*. John Wiley and Sons.
- Granger, C. W., and R. Joyeux (۱۹۸۰). *An Introduction to Long-Memory Time Series and Fractional Differencing*, *Journal of Time Series Analysis*, ۱, ۱۵-۳۰.
- Grassi, S., & Magistris, P. S. (۲۰۱۴). *When long memory meets the Kalman filter: A comparative study*. *Computational Statistics & Data Analysis*, ۷۶, ۳۰۱-۳۱۹.
- Graves, T., Gramacy, R. B., Franzke, C. L. E. and Watkins, N. W. (۲۰۱۵). *Efficient Bayesian inference for natural time series using ARFIMA*

- processes*. Nonlinear Processes in Geophysics, ۲۲ (۶). pp. ۶۷۹-۷۰۰. ISSN ۱۶۰۷-۷۹۴۶.
- Haslett, J. and Raftery, A. E. (۱۹۸۹). *Space-time Modelling with Long Memory Dependence: Assessing Ireland's Wind Power Resource*, J. Roy. Stat. Soc. Ser. C, ۳۸, ۱-۵۰.
- Hosking JRM. (۱۹۸۱) *Fractional differencing*. *Biometrika*; ۶۸:۱۶۵-۱۷۶.
- Hosking, J. R. M. (۱۹۸۴). *Modeling persistence in hydrological time series using fractionally differencing*. *Water Resources Research*, ۲۰(۱۲), ۱۸۹۸-۱۹۰۸.
- Hurst H. (۱۹۵۱). *Long-term storage capacity of reservoirs*. *Trans Am Soc Civ Eng*; ۱۱۶(۱):۷۷۶-۸۰۸.
- Jeffrey S, Pai NR. (۱۹۹۶). *Bayesian modeling of ARFIMA processes by Markov chain Monte Carlo methods*. *J Forecast*; ۱۵(۲):۶۳-۸۲.
- Jeffreys, S. P., & Ravishanker, N. (۱۹۹۸). *Bayesian analysis of autoregressive fractionally integrated moving-average processes*. *Journal of Time Series Analysis*, ۱۹, ۹۹-۱۱۲.
- Koop G, Potter S. (۲۰۰۳). *Forecasting in large macroeconomic panels using Bayesian model averaging*. FRB NY Staff Report; ۱۶۳.
- Lo, A.W (۱۹۹۱): *Long-term memory in stock market prices*, *Econometrica*, ۵۹, ۱۲۷۹-۱۳۱۳.
- Masoud Fazlalipour Miyandoab, ParvizNasiri & Ali M Mosammam (۲۰۲۳). *Bayesian estimation of fractional difference parameter in ARFIMA models and its application*. *Journal Information Sciences* , ۶۲۹, ۱۴۴-۱۵۴.
- Nan-Jung Hsu, F., & Breidt, Jay (۲۰۰۳). *Bayesian analysis of fractionally integrated ARMA with additive noise*. *Journal of Forecasting*, ۲۲, ۴۹۱-۵۱۴.
- Pesaran, M., H., Esfahani, H., S., Mohaddes, K., (۲۰۱۲). *Oil Export and the Economy of Iran*. *Journal of Monetary and Banking Research*. Vol. ۴(۱۲), pp. ۱-۱۸.
- Reisen, V., Abraham, B., & Lopes, S. (۲۰۰۱). *Estimation of parameters in ARFIMA processes: A simulation study*. *Communication in Statistics Simulation*, ۳۰(۴), ۷۸۷-۸۰۳.
- Robinson P. (۱۹۹۵). *Gaussian semi, parametric estimation of long-range dependence*. *Ann Stat*.; ۲۲(۵):۱۶۳۰-۱۶۶۱.
- Robinson, P. M. (۱۹۹۴) *Efficient Tests of Nonstationary Hypotheses*, *J. Am. Stat. Assoc.*, ۸۹, ۱۴۲۰-۱۴۳۷.
- Smith, J., Nick, T., & Yadav, S. (۱۹۹۷). *Comparing the bias and misspecification in ARFIMA models*. *Journal of Time Series Analysis*, ۱۸, ۵۰۷-۵۲۷.

- Sowell (۱۹۹۲): *Maximum Likelihood Estimation of Stationary Univariate Fractionally Integrated time series Models*, Journal of Econometrics ۵۳: ۱۶۵-۱۸۸.
- Sultan, Z., A., Haque, M., I., (۲۰۱۸). *Oil Exports and Economic Growth: An Empirical Evidence from Saudi Arabia. International Journal of Energy Economics and Policy*. Vol. ۸(۵), pp. ۲۸۱-۲۸۷.
- Tieslau, M. A., Schmidt, P., & Baillie, R. T. (۱۹۹۶). *A minimum distance estimator for long memory processes*. Journal of Econometrics, ۲۹, ۲۷۷-۳۰۲.
- Zellner A. (۱۹۸۶). *On assessing prior distributions and Bayesian regression analysis using g-prior distributions*. Bayesian inference and decision techniques: essays in honor of Bruno de Finetti. p. ۲۳۳-۲۴۳.
- Zhonglin Wan, Hongyan Li, Yi Luo & Yirong Huang (۲۰۲۲). *A novel Bayesian approach to estimate long memory parameter*, Journal of Statistical Computation and Simulation, ۹۲:۵, ۱۰۷۸-۱۰۹۱, DOI: ۱۰.۱۰۸۰/۰۰۹۴۹۶۵۵,۲۰۲۱,۱۹۸۵۴۹۶.